

О ЗАТУХАНИИ И РАССЕЯНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ

А. В. Баев, Н. В. Куценко, И. С. Файзуллин

Введение

Затухание упругих волн в горных породах во многом определяется рассеянием на мелких (по сравнению с длиной волны) неоднородностях. Однако до сих пор не известен механизм рассеяния, определяющий наблюдаемые в горных породах зависимости эффективного коэффициента затухания (суммы коэффициента рассеяния и коэффициента поглощения) и фазовой скорости от частоты. Из известных теоретических работ следует, что коэффициент затухания, связанный с рассеянием на таких неоднородностях, незначителен и пропорционален четвертой степени частоты [6, 7]. Это не соответствует экспериментальным данным, полученным для горных пород [8] и на физических моделях [2]. Поэтому такой механизм рассеяния не может играть заметной роли в затухании упругих волн, и в этом направлении необходимы дальнейшие исследования. Актуальность таких исследований вытекает также из необходимости теоретического обоснования методов, использующих рассеянные волны в чистом виде, как, например, в методе сейсмической локации бокового обзора (СЛБО).

В данной работе предлагается новая модель распространения волн в трещиноватой среде и показывается, что процесс рассеяния может приводить к затуханию, обеспечивающему необходимые частотные зависимости. Рассмотрение проведено для акустического случая, но полученные частотные зависимости справедливы и для твердых сред.

Построение математической модели

В основу предлагаемой модели рассеяния положено решение задачи дифракции на бесконечно тонком диске [4]. Пусть падающее поле характеризуется давлением p^{inc} , а полное волновое поле p представляется в виде суммы падающего p^{inc} и рассеянного p^{sc} волновых полей, т. е. $p = p^{inc} + p^{sc}$. Тогда в случае рассеяния на полой трещине, т. е. для условия Дирихле на поверхности трещины Σ , имеем

$$p|_{\Sigma} = 0, \quad p^{sc}(\mathbf{r}) = -\frac{2}{\pi} p^{inc}(0) a \frac{\exp\{ikr\}}{r}, \\ kr \gg 1, \quad ka \ll 1,$$

где a - радиус трещины; k - волновое число; $r = |\mathbf{r}|$ - расстояние от начала координат (центра трещины) до точки наблюдения.

На абсолютно жесткой трещине, т. е. для условия Неймана, обычно используют формулу так называемого рэлеевского рассеяния, а именно:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n_0} \right|_{\Sigma} = 0, \\ p^{sc}(\mathbf{r}) = \frac{2}{3\pi} p^{inc}(0) k^2 a^3 \cos \theta_i \cos \theta_s \frac{\exp\{ikr\}}{r}, \quad (1)$$

где θ_i, θ_s - углы падения и рассеяния соответственно, отсчитанные от нормали n_0 к трещине, и выполнены те же неравенства: $kr \gg 1, ka \ll 1$. В указанном приближении формула (1) вытекает из следующего решения задачи дифракции плоской волны на единичной трещине:

$$p^{sc}(\mathbf{r}) = -\frac{2}{3\pi} a^3 \left\{ \frac{\partial p^{inc}(\mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\}_{\mathbf{r}_0=0} \quad (2)$$

Исследуем, к каким последствиям приводит такое рассеяние в случае бесконечного числа подобных рассеивателей. Рассмотрим для этого процесс распространения падающей волны вдоль координатной прямой x (случай плоской или сферической волны). Энергетический учет потерь рассеяния в предположение однократного рассеяния приводит к следующему волновому уравнению (для простоты взята акустически однородная среда со скоростью распространения волн c):

$$p_{tt}^{inc} = c^2 p_{xx}^{inc} - c_1 v_1(x)(c/a_1) p_t^{inc} - \\ - c_2 v_2(x)(a_2/c)^3 \cos^2 \theta \partial_t^5 p^{inc}, \quad (3)$$

где $v_1(x), v_2(x)$ - объемная концентрация в точке x трещин первого и второго типа с соответствую-

шими размерами a_1 и a_2 ; $\theta = \theta_i$; c_1, c_2 - несущественные постоянные.

Анализ решения уравнения (3) при постоянных v_1 и v_2 показывает, что падающее поле убывает с расстоянием как $\exp\{-(\alpha_1 + \alpha_2)x\}$, где $\alpha_1 \sim v_1/a_1$, $\alpha_2 \sim v_2\omega^4a_2^3\cos^2\theta/c^4$. Однако затухание падающего поля p^{inc} также зависит от влияния на него рассеянного вперед поля. Применение предложенной в [5] методики численного расчета показало, что рассеянное вперед поле увеличивается по мере распространения волны, в то время как полное поле ослабевает [3]. Последнее обстоятельство объясняется несинфазным сложением падающей и рассеянной вперед волн.

В работе [5] рассмотрена двумерная модель рассеяния на конечном числе жестких сегментов. Ясно, что подобная модель не может давать количественные характеристики рассеяния, соответствующие реальным. Построим на основе (1 - 2) трехмерную модель для бесконечного числа рассеивателей. Очевидно, что для одной трещины уравнение (2) является решением следующего уравнения Гельмгольца:

$$\Delta p^{sc}(\mathbf{r}) + k^2 p^{sc}(\mathbf{r}) = \frac{8}{3}a^3 \left\{ \frac{\partial p^{inc}(\mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_0} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \right\}_{\mathbf{r}_0=0}. \quad (4)$$

В случае падения плоской волны вида $p^{inc}(x) = p_0^{inc}(x)\exp\{ikx\}$ и бесконечного числа одинаково ориентированных рассеивателей, расположенных однородно в каждой плоскости $x = x_l = \text{const}$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta p^{sc}(\mathbf{r}) + k^2 p^{sc}(\mathbf{r}) &= \frac{8}{3}a^3 \cos^2\theta \times \\ &\times \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ p_0^{inc}(x_l) \exp\{ikx_l\} \right\} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial x_l} \delta(x - x_l) \delta(y - y_m) \delta(z - z_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Просуммируем правую часть (5), используя свойства дельта-функции и оставляя высшую степень по k . Обозначая $\Delta x_l = x_{l+1} - x_l$, $\Delta y = y_{m+1} - y_m$, $\Delta z = z_{n+1} - z_n$, получаем

$$p_{xx}^{sc}(x) + k^2 p^{sc}(x) = \frac{8}{3}k^2 \cos^2\theta \frac{a^3}{\Delta x \Delta y \Delta z} p^{inc}(x), \quad (6)$$

где $\Delta x = \Delta x_l$, когда $x \in [x_{l+1}, x_l]$.

Таким образом, во временном представлении приходим к следующей одномерной модели рассеяния:

$$p_{tt}^{inc} = c^2 p_{xx}^{inc}, \quad p_{tt}^{sc} = c^2 p_{xx}^{sc} + 2\sigma(0) v(x) p_{tt}^{inc}, \quad (7)$$

где $\sigma(0) \sim \cos^2\theta$ - угловой фактор рассеяния.

При этом мы учтываем лишь механизм рэлеевского рассеяния, как наиболее значимый с точки зрения частотной зависимости, а в уравнении для падающего поля опускаем диссипативный член, полученный выше для случая бесконечного числа рассеивателей. Для анализа затухания полного волнового поля требуется решить оба уравнения и сложить полученные поля. Очевидно, что эта модель адекватно описывает изменение рассеянного поля, но не отражает ослабление падающего.

Одним из основных представленных в статье результатов является следующая модель, описывающая распространение волн в трещиноватых средах:

$$\begin{aligned} p_{tt}^{inc} &= c^2 p_{xx}^{inc} - 2\sigma(0) v(x) p_{tt}^{sc}, \\ p_{tt}^{sc} &= c^2 p_{xx}^{sc} + 2\sigma(0) v(x) p_{tt}^{inc}, \end{aligned} \quad (8)$$

где полное поле определяется парой $\{p^{inc}(x, t), p^{sc}(x, t)\}$.

Второе уравнение системы (8) взято из (7), а первое полностью аналогично второму и отличается лишь знаком перед источником, что соответствует тому, что рассеянное поле является стоком для падающего. В первом уравнении системы (8) опущено слагаемое, отвечающее за диссипативные потери. Такое допущение основано на том, что член, отвечающий за потери в случае рэлеевского рассеяния, отличается от второго члена в правой части уравнения множителем $(\omega a/c)^3 = (ka)^3 \ll 1$.

Построенную модель в дальнейшем называем комплексной. Нетрудно также видеть, что эта модель может быть использована и в многомерном случае на основе уравнения (4).

Исследование комплексной модели рассеяния

Совершим в системе (8) преобразование Фурье, перейдя от переменных (x, t) к (k, ω) , и положим $v(x) = v = \text{const}$ и $\sigma(0) = 1$. Условие разрешимости полученной при этом системы определяет равенство

$$\begin{vmatrix} c^2 k^2 - \omega^2 & 2v\omega^2 \\ -2v\omega^2 & c^2 k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решением этого дисперсионного уравнения являются четыре комплексных корня:

$$k(\omega) = \pm(1 \pm iv)\omega/c_\phi,$$

при $c_\phi^2 = c_r^2 \equiv c^2/(1 + 4v^2)$, где c_ϕ, c_r - фазовая и групповая скорость соответственно в трещиноватой среде.

Решение системы (8) для гармонических колебаний при этом представляется вектор-столбцом (\cdot, \cdot)^T - транспонированная строка, т. е. столбец, $A(\omega)$ - тоже вектор-столбец

$$\{p^{inc}, p^{sc}\}^T = A(\omega) \exp\{i\omega(t \pm x/c_\phi) \pm v\omega x/c_\phi\}. \quad (9)$$

Важное свойство решения (9) заключается в том, что волна затухает, как $\exp\{-v\omega x/c_\phi\}$, и коэффициент затухания оказывается пропорциональным первой степени частоты, что наблюдается в горных породах и на физических моделях. В то же время могут существовать решения, приводящие к экспоненциальному росту амплитуды волны. Такие решения лишены физического смысла и исключаются с помощью условий излучения. Подробное исследование системы (8) приводится в Приложении.

Вычислительный эксперимент по моделированию рассеяния волн

Для изучения свойств падающего и рассеянного волновых полей проводятся два вычислительных эксперимента, в которых численно решается система (8). Моделирование реализовано для двумерного случая, что, как видно из системы (8), не принципиально, так как источники не зависят от пространственных производных. Схема проведения экспериментов изображена на рисунке, *a* (см. цвет. вкл.). Область с трещинами, т. е. область, где коэффициент *v* отличен от нуля, имеет форму квадрата со стороной 500 м. Размер вычислительной сетки равнялся 200×200 точек с шагом по пространственным переменным $\Delta x = \Delta z = 10$ м и по временной координате $\Delta t = 0,001$ с, скорость распространения волн была равна 2500 м/с.

В первом эксперименте предполагается, что в области с трещинами их объемная концентрация меняется в каждой точке случайным образом от 0 до 0,01, а ориентация трещин постоянна и $\sigma(0) = 1$ (трещины ориентированы ортогонально направлению распространения падающей волны). На рисунке, *b* изображено падающее поле, на фоне которого рассеянное назад поле не проявляется, так как его интенсивность намного слабее. На рисунке, *c* показано рассеянное поле. Из этого рисунка видно, что интенсивность поля рассеянной вперед волны зависит от длины пути, пройденного по области с трещинами: чем больше этот путь, тем больше интенсивность рассеянной вперед волны. Последнее свидетельствует о том, что при этом происходит синфазное сложение волн, рассеянных на каждом включении.

Во втором эксперименте при тех же значениях объемной концентрации *v* меняется случайным образом и ориентация трещин: $0 < \sigma(0) \leq 1$, т. е.

рассеивающие свойства среды ослабевают. Падающее поле при этом визуально не отличается от поля, изображенного на рисунке, *b*, поэтому оно не приведено отдельно. На рисунке, *c* представлено рассеянное поле, рассчитанное для этого случая. Сопоставляя рисунки, *b* и *c*, можем отметить, что поле на рисунке, *c* почти в 2 раза слабее поля на рисунке, *b*, но флуктуации поля заметнее.

Обсуждение полученных результатов

Предложенная модель распространения волн в трещиноватых средах учитывает ослабление падающего поля как за счет непосредственных потерь на рассеяние, так и за счет взаимодействия этого поля с рассеянным вперед. Благодаря этому она позволяет получить частотную зависимость коэффициента рассеяния, наблюдавшуюся на физических моделях со случайнм распределением одинаковых по размеру трещин, чего раньше достичь не удавалось. Прямое сопоставление полученных данных с экспериментами на твердых моделях невозможно, а из качественного сопоставления следует, что коэффициент затухания, определенный из предложенной модели и равный $v(a)\omega/c$, по порядку величины оказывается сопоставимым с коэффициентом рассеяния, полученным при моделировании (0,012 против 0,07). Если не учитывать пористые среды, насыщенные жидкостью, то не противоречит экспериментальным данным отсутствие дисперсии скоростей, следуемое из предложенной модели. Необходимо подчеркнуть, что все это справедливо в области частот, определяемой неравенством $\omega \ll c/a$. Справедливость предложенной модели также подтверждается результатами численного моделирования, которые позволяют наблюдать четкий фронт рассеянной вперед волны и зависимости амплитуды волны от рассеивающих свойств среды.

Выводы

- Затухание волн определяется не только дисси-пративным рассеянием на мелких включениях типа трещин, но и взаимодействием падающей волны с рассеянной вперед.
- Предложенная модель распространения волн в трещиноватых средах удовлетворительно объясняет наблюдаемые частотные зависимости и порядок абсолютной величины коэффициента рас-сения.
- Рассеяние на мелких по сравнению с длиной волны неоднородностях типа трещин играет большую роль в затухании волн в трещиноватых средах, каковыми являются большинство горных пород.

Приложение

Введем для упорядоченной пары $W = \{p^{inc}, p^{sc}\}$ описание в виде комплексной переменной $W = p^{inc} + ip^{sc}$, для которой система (8) запишется в виде волнового уравнения с комплексной скоростью $c/(1 - iv) = c\sqrt{1 + 2iv}$ (с учетом малости v)

$$W_{tt} = (c/(1 - iv))^2 W_{xx}, \quad (10)$$

и исследуем некоторые свойства решений этого уравнения.

Задача Фурье. Поставим для (10) задачу Фурье, т. е. краевую задачу при $x > 0$ без начальных условий:

$$p^{inc}(0, t) = f(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (11)$$

и наложим условие регулярности (ограниченности) решения при $x, t \rightarrow \infty$.

Пусть вначале $f(t)$ - аналитическая функция при $|t| < \infty$. Тогда поставленная задача имеет решение в виде разложения в степенной ряд:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= f(t - (1 - iv)x/c) = \\ &= f(t - x/c) + i(vx/c)f'(t - x/c) - \\ &\quad -(vx/c)^2 f''(t - x/c) - i(vx/c)^3 f'''(t - x/c) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Действительная часть (12) описывает падающее поле, а мнимая - рассеянное, т. е.

$$p^{sc}(x, t) \approx (vx/c)f'(t - x/c) + O(v^2).$$

Такое описание решения справедливо вблизи фронта волны, т. е. при $t \approx x/c$.

Нетрудно видеть, что от условия аналитичности функции $f(t)$ можно отказаться. Пусть $f(t) \in C^1(-\infty, \infty)$, $|t|^{1+\epsilon}|f'(t)| < M$, $\epsilon > 0$. Тогда решение задачи Фурье дается следующей формулой, вытекающей из интеграла Шварца:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t - x/c + vx\zeta/c)}{1 + \zeta^2} d\zeta + \\ &\quad + \frac{i\sqrt{x}}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t - x/c + vx\zeta/c) \ln(1 + \zeta^2) d\zeta. \end{aligned}$$

Второе слагаемое точно описывает рассеянное поле. Заметим, что условия на функцию $f(t)$ можно ослабить до $f(t) \in C(-\infty, \infty)$, $|t|^{\epsilon}|f(t)| < M$.

Начально-краевая задача. Поскольку задача Фурье в определенной степени носит качественный характер, поставим для (8) следующую начально-краевую задачу (для волн, распространяющихся в направлении роста x ; ϕ, ψ - начальные условия):

$$\begin{aligned} p^{inc}(x, 0) &= \phi(x), \quad p^{sc}(x, 0) = \psi(x), \\ 0 < x < L, \quad \phi, \psi &\in C[0, L], \\ p^{inc}(0, t) &= f(t), \quad p^{inc}(L, t) = 0, \\ 0 \leq t \leq T, \quad f &\in C[0, T]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для анализа этой задачи сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \xi &= t - x/c, \quad \eta = vx/c, \quad u = p^{inc}, \\ s &= p^{sc}, \quad w(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) + is(\xi, \eta) = W(x, t). \end{aligned}$$

Тогда для $u(\xi, \eta)$ (u и s - гармонически сопряженные функции) приходим к следующей начально-краевой задаче для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad -\eta/v < \xi < (T - \eta)/v, \quad 0 < \eta < vL/c, \\ u(-\eta/v, \eta) &= \phi(c\eta/v), \\ [vu_\xi + u_\eta]_{\xi=-\eta/v} &= c\psi'(c\eta/v), \\ u(\xi, 0) &= f(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq T, \\ u(\xi, vL/c) &= 0, \quad -L/c \leq \xi \leq -L/c + T. \end{aligned}$$

Эта задача, являющаяся задачей продолжения потенциала, некорректно поставлена по причине как существования решения, так и его устойчивости. Из условий ее разрешимости следует, что начальные условия для падающего и рассеянного полей не могут быть заданы произвольно. Естественными условиями, при которых задача разрешима, являются нулевые. Однако неустойчивость решения в равномерной метрике не зависит от начальных условий задачи и является ее существенным свойством. В общем случае решение подобных задач требует использования специальных методов, основанных на сведениях к краевым задачам для уравнения Лапласа [1].

Причина указанной выше неустойчивости заключается в наличии растущих решений, содержащих множитель $\exp(ivkx)$. Возникает естественный вопрос, можно ли для решения таких задач использовать эволюционные схемы решений, т. е. решать (8) как гиперболическую систему. Ответ такой: при определенных условиях можно. Эти условия заключаются в специальном задании краевого условия для $p^{sc}(0, t)$. Для этого в задаче Фурье вектор-столбец $\{p^{inc}(0, t), p^{sc}(0, t)\}^T$ должен быть нуль-вектором характеристической системы для (8), соответствующим характеристическому корню $k(\omega) = -(1 - iv)\omega/c_{\phi}$. В терминах фурье-образов это выражается равенствами $\hat{p}^{sc}(0, \omega) = i\hat{p}^{inc}(0, \omega) = i\hat{f}(\omega)$. Тем самым, экспоненциально растущей вол-

ны нет, если $p^{sc}(0, t)$ является сигналом $f(t)$, сдвинутым по фазе на $\pi/2$. Практически такое условие можно реализовать, лишь отодвинув область трещиноватости от границы и давая возникнуть рассеянному полю естественным образом.

Если решения задач (10 - 11) или (10), (13) строятся на основе численных методов эволюционного типа, то в процессе вычисления неизбежно возникают ошибки, растущие как $\varepsilon \exp\{vkx\}$, где ε по порядку равно вычислительной погрешности. Полагая $v = 0,01$, $\omega = 100$ Гц, $c = 2000$ м/с, $x = 2000$ м, получаем для погрешности решения величину $\sim 3\varepsilon$, что практически означает вычислительную устойчивость. Таким образом, можно сделать следующий вывод: если рассеянное поле появляется в процессе вычислений естественным образом, то в определенном диапазоне частот решение поставленных задач возможно в некоторой ограниченной области на основе эволюционных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов А. М., 1994, Введение в теорию обратных задач: М., Изд-во Моск. ун-та.
2. Файзуллин И. С., 1981, Затухание упругих волн в горных породах: Нефтегазовая геология и геофизика, 2, 29 - 31.
3. Файзуллин И. С., Куценко Н. В., 2004, О возможности применения рассеянных волн для изучения трещиноватости геосреды по данным численного моделирования: Геофизика, 5, 5 - 9.
4. Хендл Х., Mayuz A., Вестфаль К., 1964, Теория дифракции: М., Мир.
5. Gerben B. van Baren, Wim A. Mulder, Gerard C., Herman, 2001, Finite difference modeling of scalar wave propagation in cracked media: Geophysics, 66, 267 - 276.
6. Hudson J. A., 1981, Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks: Geophys. J. R. Astr. Soc., 64, 133 - 150.
7. Johnson D. H., Toksoz M. N., Timur A., 1979, Attenuation of seismic waves in dry and saturated rocks: II Mechanisms: Geophysics, 1979, 44, 691 - 711.
8. Kjartansson E., 1979, Constant Q wave propagation and attenuation: J. Geophys. Res., 84, 4337 - 4748.

ОБ АВТОРАХ



Андрей Владимирович
БАЕВ

Профессор кафедры математической физики факультета ВМ и КМГУ, доктор физ.-мат. наук. Окончил Московский государственный университет в 1971 г. Специалист в области математического моделирования и решении обратных задач сейсморазведки. Автор 75 печатных работ.



Николай Валентинович
КУЦЕНКО

Научный сотрудник ООО НВП "Геоакустик". Аспирант кафедры математической физики факультета ВМиК МГУ. В 2003 г. окончил Московский государственный университет. Автор 7 печатных работ.

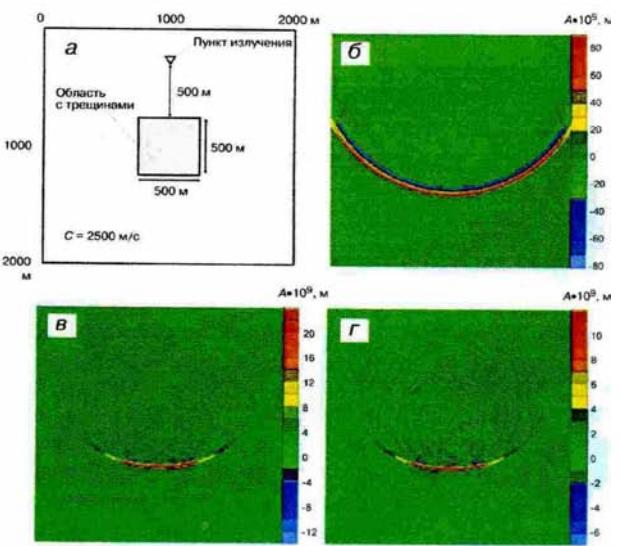


Ирик Султанович
ФАЙЗУЛЛИН

Заведующий лабораторией разработок сейсмоакустических технологий ВНИИгосистем, научный руководитель ООО НВП "Геоакустик", доктор физ.-мат. наук, профессор. Окончил Московский государственный университет в 1959 г. Разработчик технологий межскважинного прозвучивания, сейсмоакустического воздействия на пласт с целью повышения нефтеотдачи, сейсмической локации бокового обзора. Автор более 100 печатных работ, имеет 9 патентов на изобретения.

Рецензенты - доктор технических наук С. Н. Птецов, доктор технических наук Е. А. Козлов.

К статье “О затухании и рассеянии сейсмических волн в трещиноватых средах”



Вычислительный эксперимент по моделированию распространения волн в трещиноватой среде:

а - схема проведения вычислительных экспериментов;
б - падающее волновое поле для случая $0 < v(x, z) \leq 0,01$ и $\sigma(\theta) = 1$; *в* - рассеянное волновое поле для случая $0 < v(x, z) \leq 0,01$ и $\sigma(\theta) = 1$; *г* - рассеянное волновое поле для случая $0 < v(x, z) \leq 0,01$ и $0 < \sigma(\theta) \leq 1$; все приведенные волновые поля изображены после выхода рассеянной вперед волны из области с трещинами; положение квадрата с трещинами приведено на позиции *а*